ANNEE 2003

CONCOURS D'ADMISSION

A

L'ECOLE DE L'AIR

CONCOURS MP

PREMIERE EPREUVE
DE
MATHEMATIQUES

Durée : 4 heures
Coefficient : 13

L'attention des candidats est attirée sur le fait que la notation tiendra compte du soin et de la rigueur apportés dans le travail.

Nota : Si un candidat est amené à repérer ce qui peut lui sembler une erreur d'énoncé, il le signalera sur sa copie et devra poursuivre sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il a été amené à prendre.

T.S.V.P.

Le but de ce problème est d'établir certains résultats classiques relatifs aux fonctions périodiques et aux séries de Fourier puis d'étudier les coefficients de Fourier de certaines fonctions qui ne sont pas de classe C^1 par morceaux.

On rappelle les notations usuelles utilisées pour l'expression des coefficients de Fourier d'une fonction f continue et 2π périodique :

$$c_k(f) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)e^{-ikx}\,dx,$$

$$a_k(f) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos(kx)\,dx, \qquad b_k(f) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin(kx)\,dx$$

1-Préliminaire

1. Montrer que, $\forall n\in\mathbb{N},\ \forall \theta\in\mathbb{R}\backslash 2\pi\mathbb{Z},\ \sum_{k=-n}^{n} e^{ik\theta} = \frac{\sin((n+\frac{1}{2})\theta)}{\sin(\frac{\theta}{2})}$.

2. Pour $n\in\mathbb{N}^*$, développer $\sum_{p=0}^{n}\sum_{k=-p}^{p} e^{ik\theta}$ sous la forme $\sum_{k=-n}^{n}\alpha_{k,n}\,e^{ik\theta}$ où les $\alpha_{k,n}$ sont des réels à déterminer.

3. En considérant $\sum_{p=0}^{n}\frac{(\sin(p+\frac{1}{2})\theta)}{\sin(\frac{\theta}{2})}$, montrer que :

$$\forall n\in\mathbb{N},\ \forall \theta\in\mathbb{R}\backslash 2\pi\mathbb{Z},\ \sum_{k=-n}^{n}(1-\frac{|k|}{n+1})e^{ik\theta} = \frac{1}{n+1}\left(\frac{\sin\left(\left(\frac{n+1}{2}\right).\theta\right)}{\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)}\right)^2.$$

On désigne alors, pour $n\in\mathbb{N}$, par ϕ_n la fonction définie par

$$\forall \theta\in\mathbb{R},\ \phi_n(\theta) = \sum_{k=-n}^{n}(1-\frac{|k|}{n+1})e^{ik\theta}$$

4. Montrer que ϕ_n est continue sur $\mathbb{R}$, 2π périodique, paire, positive ou nulle et déterminer $\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\phi_n(\theta)\,d\theta$.

5. Soit r un réel élément de l'intervalle]0, 1[. Montrer que, pour tout réel θ, on a

$$\frac{1-r^2}{1+r^2-2r.\cos(\theta)} = 1 + 2\sum_{k=1}^{+\infty} r^k\cos(k\theta)$$

On désigne alors, pour $r\in$]0, 1[, par P_r la fonction définie par

$$\forall \theta\in\mathbb{R},\ P_r(\theta) = \frac{1-r^2}{1+r^2-2r.\cos(\theta)}$$

6. Montrer que P_r est continue sur $\mathbb{R}$, 2π périodique, paire, strictement positive et déterminer $\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} P_r(\theta)\,d\theta$.

2-Approximations de fonctions périodiques.

Soit f une fonction d'une variable réelle et à image réelle, continue sur $\mathbb{R}$ et 2π périodique.
Pour $n\in\mathbb{N}^*$, $r\in]0, 1[$ et $t\in\mathbb{R}$, on pose :

$Q_n(f)(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \phi_n(\theta) f(t-\theta)\,d\theta$ et

$T_r(f)(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} P_r(\theta) f(t-\theta)\,d\theta$.

7. Montrer que f est uniformément continue sur $\mathbb{R}$.

8. Montrer que $Q_n(f)$ est un polynôme trigonométrique dont on calculera ses coefficients de Fourier $(c_k(Q_n))_{k\in\mathbb{Z}}$ en fonction des $c_k(f)$.

9. Soit δ vérifiant $0<\delta<1$.
Montrer que pour tout réel t on a :
$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{-\delta}\phi_n(\theta)\left|f(t-\theta)-f(t)\right|d\theta + \frac{1}{2\pi}\int_{\delta}^{\pi}\phi_n(\theta)\left|f(t-\theta)-f(t)\right|d\theta \le 2\sup_{x\in\mathbb{R}}|f(x)|\frac{1}{(n+1)(\sin(\frac{\delta}{2}))^2}$$

10. Montrer alors que la suite de fonctions $(Q_n(f))_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge uniformément sur $\mathbb{R}$ vers la fonction f.

11. Montrer que
$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left|f(t)-Q_n(f)(t)\right|^2 dt = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}\frac{k^2}{(n+1)^2}\left(|a_k(f)|^2+|b_k(f)|^2\right)+\frac{1}{2}\sum_{k=n+1}^{+\infty}\left(|a_k(f)|^2+|b_k(f)|^2\right)$$
(Cette intégrale mesure l'erreur quadratique commise dans l'approximation).

12. Montrer que $\forall r\in]0, 1[, \forall t\in\mathbb{R}$, $T_r(f)(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} r^{|k|}c_k(f)e^{ikt}$.

13. Montrer que la fonction $T_r(f)$ est continue sur $\mathbb{R}$ et calculer ses coefficients de Fourier.

14. Montrer que $\forall\varepsilon>0, \exists\, r_0\in]0, 1[, \forall r\in]r_0, 1[, \sup_{t\in\mathbb{R}}|T_r(f)(t)-f(t)|\le\varepsilon$.

15. Montrer que $\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left|f(t)-T_r(f)(t)\right|^2 dt = \sum_{k=-\infty}^{+\infty}((1-r^{|k|})^2|c_k(f)|^2)$
(Cette intégrale mesure l'erreur quadratique commise dans l'approximation).

3-Un cas particulier du théorème d'échantillonnage de Shannon.

On désigne par E le $\mathbb{R}$-espace vectoriel des fonctions paires nulles en dehors du segment $[-\pi, \pi]$ et dont la restriction à ce segment est de classe C^1. Pour $f \in E$ on définit la transformée de Fourier de f, notée $\hat{f}$, par

$\forall x \in \mathbb{R}, \hat{f}(x) = \int_{\mathbb{R}} f(t)e^{-ixt}dt.$

16. Montrer que $\hat{f}$ est une fonction paire, de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$.

17. Montrer que

$$\forall x \in [-\pi, \pi], f(x) = \frac{1}{2\pi}\left(\hat{f}(0) + 2\sum_{n=1}^{+\infty} \hat{f}(n)\cos(nx)\right)$$